

【数学 I】

～ClassPad.net の授業支援機能・各種ふせんを活用する～

循環小数の性質を考える授業

循環小数の性質を見出し整数の性質に触れる。

【本授業の目的・狙い・到達目標】

教師向けの目標：循環小数の性質を見つけることで、分数が有限小数や循環小数で表される仕組みについての理解を深め、整数の性質の面白さを体感させる。

生徒向けの目標：自身で循環節を計算し、共通する性質を発見することで、整数の性質に触れる。

【ClassPad.net 活用によるメリット】

- ・探究学習促進：授業支援機能により、個別探究や協働探究に対するプロセス評価を含めたフィードバックを即座に行うことで、探究活動を促進・深化させることができる。
- ・協働学習促進：個別学習→グループワーク→議論のサイクルを効率化することで、協働学習による理解の向上を促進する。
- ・評価・評定の効率化：授業支援機能を用いることで、生徒それぞれが授業中に行った活動に対して授業中に評価することができる。

授業の流れ

ClassPad.net での操作

step1

【本日の授業】

前回の授業では、整数ではない有理数を小数で表したとき、有限小数になる場合と、ならない場合があることを学習した。

今日は、循環小数となる分数について、どのような性質があるか、具体的な計算を通して考えてみよう。

概要の説明

無限小数となる分数について、どのような性質があるか、具体的な計算を通して考えていくことを説明する。

step2

【復習】

有限小数となる… 例) $\frac{1}{8} = 0.125$

循環小数となる… 例) $\frac{7}{22} = 0.31\bar{8}$

循環小数においてくり返し現れる数字の配列を循環節という

既約分数が有限小数となる条件
分母の素因数が2と5だけである既約分数 ⇔ 有限小数
※既約分数…それ以上約分できない分数

【例題】

$\frac{1}{7}$ は、分母の素因数が7であるから、循環小数になる。循環節を求めてみよう。

基礎事項の復習・例題の説明

言葉の確認：有限小数、循環小数、既約分数、循環節

定理の確認：既約分数が有限小数となる条件

例題

「 $\frac{1}{7}$ は、分母の素因数が7であるから、循環小数になる。循環節を求めてみよう。」という例題を提示し、生徒に解いてもらう。そして、循環節の数字の個数を循環節の長さと呼ぶこと、 $\frac{1}{7}$ の場合、循環節は、142857、循環節の長さは6であることを確認する。

教員が用意したテキストふせんを電子黒板やプロジェクターを用いて投影し、既習事項を確認する。例題は ClassPad.Math の四則演算機能を用いて、その場で結果を確認する。

step3

【課題】

分母が2、5以外の素数 p について、 p の逆数 $\frac{1}{p}$ を小数で表すと循環小数になる。その循環節にはどのような性質があるか考えてみよう。

【課題の共有①】

まず、1～40までの整数の中にある素数を探してみよう。

導入・課題の共有

「分母が2、5以外の素数 p について、 p の逆数 $1/p$ を小数で表すと循環小数になる。その循環節にはどのような性質があるか考えてみよう。」という課題を提示する。

まず、40 までの整数の中にある素数を探して p の値を整理する。

次に、 $1/p$ を小数で表し、循環節とその長さを求め、表に書き込んでいくことを説明する。

課題が書かれたテキストふせんを電子黒板やプロジェクターを用いて投影し、生徒に確認させる。そして生徒に素数を上げてもらい、教員がテキストふせんに手描き機能で書き込みながら整理する。

次に、 p 、 $1/p$ 、循環節、循環節の長さが書かれた表に、あらかじめ p 、 $1/p$ の値を書き込んだ状態にしたものをファイルふせんに用意しておき、授業支援機能で生徒に配布する。

step4

【個別学習・グループワーク】

$\frac{1}{p}$ を小数で表し、循環節とその長さを求め、表に書き込んでみよう

ゴール
課題への取り組み方
①はじめは個人で行い、計算過程はテキストふせんに残すこと
②グループで考えを聞いたら、議定書機能を用いてグループメンバー内で互いに計算結果を確認し合うこと
③提出の仕方
計算結果：配布したファイルふせんに手描き機能で答えを書き込んで提出すること
計算過程：テキストふせんに、グループで1つの分数につき1つ手書きしたものを提出すること

グループ（ ）

p	$1/p$	1/pを小数で表す	循環節	循環節の長さ
3	1/3	0.3	3	1
7	1/7	0.142857	142857	6
11	1/11			
13	1/13			
17	1/17			
19	1/19			
23	1/23			
29	1/29			
31	1/31			
37	1/37			

個別学習・グループワーク

クラスをいくつかのグループに分ける。

$p=3, 7$ を除いた 8 つの分数を提示し、step3 の課題の中から取り組む問題をグループごとに指定する。この際、循環節の長さに注意（長いものと短いものを組み合わせるなど）して計算量に差が出ないようにする。

計算結果は消さないように指導する。まずは個人で取り組み、その後グループで確認し合わせる。

個別学習では、計算過程をテキストふせんに残させる。

グループ学習では、あらかじめファイルふせんに用意した表を授業支援機能で生徒に送信する。計算結果はファイルふせんに手描き機能で直接描き込ませて提出してもらう。この際、個別に計算したテキストふせんを送受信機能で共有し合い、互いに計算結果を確認してから進めるよう促す。

計算過程はグループで 1 つの分数につき 1 枚のテキストふせんを提出してもらい、各グループの計算過程を一覧できるようにしておく。

step5

【計算結果の答え合わせ】

計算結果を確認しよう。

1/3: 0.3333333333333333
1/7: 0.14285714285714285
1/11: 0.09090909090909091
1/13: 0.07692307692307692
1/17: 0.05882352941176471
1/19: 0.052631578947368421
1/23: 0.0434782608695652173913
1/29: 0.0344827586206896551724137931
1/31: 0.032258064516129
1/37: 0.027027027027027027

【表から分かることのまとめ】

p	$1/p$	1/pを小数で表す	循環節	循環節の長さ
3	1/3	0.3	3	1
7	1/7	0.142857	142857	6
11	1/11	0.09	09	2
13	1/13	0.076923	076923	6
17	1/17	0.0588235294117647	0588235294117647	16
19	1/19	0.052631578947368421	052631578947368421	18
23	1/23	0.0434782608695652173913	0434782608695652173913	22
29	1/29	0.0344827586206896551724137931	0344827586206896551724137931	28
31	1/31	0.032258064516129	032258064516129	15
37	1/37	0.027027	027	3

議論・発表

8 つの分数の循環節とその長さをまとめた表から考えられる性質を議論させる。

$p=7, 17, 19, 23, 29$ は、循環節の長さが $(p-1)$ であることを生徒から引き出す。

$p=3, 11, 13, 31, 37$ については、 $(p-1)$ の約数であることを教員がヒントを与えながら引き出す。

ある程度の時間をとったところで各グループに気づいたことを発表してもらい、表から分かることをまとめる。

$p, 1/p$ 、循環節、循環節の長さが書かれた表にあらかじめ $p=3, 7$ の場合を書き込んだ状態で、ファイルふせんに用意しておく。循環節の長さの右にもう一列ヘッダのない列を用意しておき、議論で出た結論を手描き機能で書き込ませるようにする。

step6

【定理①】

p を2と5以外の素数とする。
 p の逆数 $\frac{1}{p}$ を小数で表したとき、
その循環節の長さは、 $(p-1)$ の約数になる。

循環節が偶数の場合、循環節を2等分すると…

例) $p = 7$ のとき、

142
+) 857
999

定理の紹介

定理①
 p を2と5以外の素数とする。 p の逆数 $1/p$ を小数で表したとき、その循環節の長さは、 $(p-1)$ の約数になる。

さらに、循環節が偶数の場合、循環節を2等分すると、999…999 が現れることを見せ、次の定理を紹介する。

定理②
 p を2と5以外の素数とする。 p の逆数 $1/p$ を小数で表したとき、その循環節の長さが偶数であれば、循環節を2等分した数の和は、999…999 の形となる。

教員が用意したテキストふせんを電子黒板やプロジェクターを用いて投影し、定理を確認する。

p 、 $1/p$ 、循環節、循環節の長さ、 $(p-1)$ 、2分割和が書かれた表をあらかじめファイルふせんに用意しておき、定理②とともに結果を示す。

step7

【まとめ】

今日、学習したように、循環小数や素数など、整数の世界には、興味深い性質が多くある。

興味があれば、性質を探したり、調べたり、証明に挑戦したりと、さらに整数の性質に触れてみよう。

【宿題】

$\frac{1}{73}$ を小数で表したとき、循環節の長さは8と分かっている。このとき、循環節を求めてみよう。

今日、学習したことを振り返りながら取り組もう

小数第何位まで計算すればよいのか、見通しを持って計算しよう。

2分割和の性質を利用すると、計算量を減らせいか考えてみよう。

まとめ・宿題

今回紹介したように、循環小数や素数など、整数の世界には、興味深い性質が多くあることを説明する。

また、 $1/p$ を小数で表したときの循環節の長さを与えた上で循環節を求める問題を宿題とする。

循環節の長さが分かれば、小数第何位まで計算すればよいか見通しが立てられることや、2分割和の性質と合わせれば、循環節の前半部分がのみを計算すればよいことなどを確認し、宿題のヒントとする。

step8

【参考・補足】

循環小数の性質は他にもあり、まだ分かっていないこともたくさんある。

次のリンクふせんで紹介する動画を視聴して、整数の世界に入ってみよう。

参考・補足

循環小数の性質は他にもあり、まだ分かっていないこともたくさんある。整数の性質に触れ、その奥深さや数学としての面白さを感じてほしい、という意図を込めた授業であることを説明する。

授業の意図を伝える際の補助として、下のYouTube動画のURLを貼り付けたリンクふせんを授業支援機能を用いて配布し、視聴を促す。

「割り切れないのも悪くない（循環小数）」
(<https://www.youtube.com/watch?v=G0gZVJxOyfA>)