

【数学 A】

図形の性質（空間図形）
多面体の性質

～ClassPad.net の授業支援機能・各種ふせんを活用する～

多面体の性質を理解する授業

オイラーの多面体定理を導きその有用性を実感する。

【本授業の目的・狙い・到達目標】

教師向けの目標：正多面体の面、頂点、辺の数からオイラーの多面体定理を導き、デルタ多面体に
応用することで、定理の有用性を実感させる。

生徒向けの目標：多面体の性質を理解する。

【ClassPad.net 活用によるメリット】

- ・探究学習促進：授業支援機能により、個別探究や協働探究に対するプロセス評価を含めたフィードバックを即座に行うことで、探究活動を促進・深化させることができる。
- ・協働学習促進：個別学習→グループワーク→発表→議論のサイクルを効率化することで、協働学習による理解の向上を促進する。
- ・生徒の集中力アップ：授業支援機能を用いることで、生徒それぞれが授業中に行った活動に対して授業中に評価することができる。

授業の流れ

ClassPad.net での操作

step1

【本日の授業】

相加平均と相乗平均の大小関係の考え方が、
私たちの生活の中でどのように利用されている
か、具体的な計算を通して考えていこう。

目的・概要の説明

三角柱、三角錐などのように多角形の面
で囲まれた立体を多面体という。多面体
にはどのような性質が成り立つか、具体
的な計算を通して考えていくことを説明
する。

step2

【相加平均と相乗平均】

2つの実数 a, b について、
 $\frac{a+b}{2}$ を、 a と b の相加平均という。
また、 $a > 0, b > 0$ のとき、
 $\sqrt{ab}$ を、 a と b の相乗平均という。

相加平均と相乗平均の大小関係
 $a > 0, b > 0$ のとき、 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
等号が成り立つのは、 $a = b$ のときである。

導入

言葉の確認：凸多面体、正多面体

正多面体は、正四面体、正六面体（立方体）、正八面体、正十二面体、正二十面体の5種類しかないことが知られている。

教員が用意したテキストふせんを電子黒板などに映し、既習事項を確認する。

step3

【課題】

文化祭の最後を飾る後夜祭で、体育館の中央に、面積 $16m^2$ の長方形の光る特設ステージを設置することになった。
暗い館内で目立たせるため、周囲の四辺すべてをLEDテープライトで囲う。
LEDテープライトの最小販売単位は $0.1m$ で、価格は $0.1m$ あたり 200 円であるとき、最小予算はいくらか。

課題の共有

課題

「正多面体について、面の形、面の数、頂点の数、辺の数を調べて、どのような性質が成り立つか考えてみよう。」
正八面体を例に考え方を説明し、全体で共有した上で課題に取り組ませる。

課題が書かれたテキストふせんを電子黒板やプロジェクターを用いて投影し、生徒に考えさせる。

step4

【グループ学習】

縦と横の長さの和が最小になるとき、予算が最小になる。

縦の長さが、 $1m, 2m, \dots, 16m$ のときの、横の長さ、縦と横の長さの和、予算を求め、表に書き込んでみよう。

個別学習

個人で課題に取り組む。

成り立つ性質については、次のようなものが想定される。

- ・表を縦に見て、偶数や何かの倍数に着目する
 - ・表を横に見て、面の数、頂点の数、辺の数を比較したり、和を考えたりする
- 偶数同士の和は偶数になることや、3つのうち2つの和を考えてみることなどをヒントに、生徒自身が「頂点の数+面の数=辺の数+2」であることに気づくように誘導する。

あらかじめファイルふせんに用意したワークシートを授業支援機能で生徒に送信する。

ワークシートに手描き機能で直接描き込ませて、提出してもらう。

step5

【考えてみよう】

もっと細かく計算したら、縦と横の長さの和をもっと短くできるのか。

正方形のとき、縦と横の長さの和が最小であることを論理的に説明できるか。

定理の発見と考察

生徒から性質を発表してもらった上で、オイラーの多面体定理を紹介する。

「凸多面体の頂点、辺、面の数をそれぞれ、 v, e, f とすると、 $v - e + f = 2$ が成り立つ」

オイラーの多面体定理が、正多面体以外でも成り立つことを、デルタ多面体を例に考察させる。

まず、正多面体の、各頂点に集まる面の数はすべて等しいという条件を外した場合にどのような立体ができるかを考えさせる。1つの頂点に集まる角の和に注目させ、中心角の合計は 360 度未満であるという空間図形の基本に立ち返り、すべての面が正五角形、正四角形で囲まれた凸多面体はそれぞれ1種類しかできないことを確認する。正三角形に関しては、4枚（正四面体）から2枚ずつ増やしていけば、10枚までは凸多面体ができると考えられることを、全体で共有する。次に、デルタ多面体の説明をする。すべての面が正三角形でできている凸多面体のことをデルタ多面体といい、デルタ多面体は、正多面体を含めて全部で8種類できることを説明する。

そして、「デルタ多面体のうち正多面体でないものについて、面の数から、辺の数、頂点の数を求めてみよう。」という発問をする。

生徒に発表してもらった性質は、教員がテキストふせんに直接書き込む。定理やデルタ多面体の説明、発問などは、あらかじめテキストふせんやファイルふせんに用意しておき、電子黒板やプロジェクターを用いて投影し、説明する。

step6

面積が $16m^2$ の長方形の縦の長さを $x(m)$ 、横の長さを $y(m)$ とするとき、 $x+y$ を最小にする x, y はいくつか。

【考え方】
面積が $16m^2$ であるから、 $xy=16$ が成り立つ。
 $x>0, y>0$ より、 $y=\frac{16}{x}$
相加平均と相乗平均の大小関係より、
 $x+\frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}}=2\sqrt{16}=8$
よって、 $x+y$ の最小値は 8
等号が成り立つのは、 $x=\frac{16}{x}$ のときだから、
 $x^2=16$
 $x>0$ より、 $x=4$
以上より、 $x+y$ を最小にする x, y は $x=4, y=4$ である。

グループワーク

クラスをいくつかのグループに分け、教え合いながらに取り組ませる。
ここでは、多面体の形は見せずに考えさせる。つまりいているグループには、1つの面には3本の辺があること、1つの辺に集まる面の数が2であること、面の数、頂点の数、辺の数のうち2つが分かれば、オイラーの多面体定理を利用できることなどを適宜ヒントとして与える。

あらかじめファイルふせんに用意したワークシートを授業支援機能で生徒に送信する。
グループごとにワークシートに手描き機能で直接書き込ませて、提出してもらい、各グループの結果を一覧できるようにしておく。

step7

【考えてみよう】
特設ステージを体育館の壁際に設置すれば、壁側の1辺にはLEDテープライトを貼らなくて済むのではないか。
壁側の1辺を除いた3辺（縦2本、横1本）の合計の長さを最小にしたい場合でも、正方形のときに、LEDテープライトの長さが最も短くなるか。

面積が $16m^2$ の長方形の縦の長さを $x(m)$ 、横の長さを $y(m)$ とするとき、 $2x+y$ を最小にする x, y はいくつか。

答え合わせ

各グループの結果を見ながら答え合わせをしていく。イメージしにくい、デルタ十二面体、十四面体、十六面体については、図を利用しながら説明し、答え合わせをする。

多面体の図については、教員が用意したテキストふせんを電子黒板やプロジェクターを用いて投影し、説明する。

step8

【まとめ】
縦＝4m、横＝4mなら予算が32000円なのに対し、縦＝1m、横＝16mでは予算が68000円となり、2倍以上も異なっている。
このように限られた予算の中で、いかに費用を無駄なく抑えるかという考え方は、設計の現場や社会のあらゆる場面で役立っている。

まとめ・宿題

まとめ
定理の有用性を確認する。オイラーの多面体定理を利用すると、形が想像できない複雑な凸多面体であっても面の数から、辺や頂点の数を正確に求めることができる。また、すべての辺や頂点の数を数え上げなくても、求めることができる。ただしドーナツのように穴が空いている多面体や、L字型に凹んでいたりするものについては利用できないことを補足する。

宿題
教科書 p.126 を読み、練習 1 に取り組む。

教員が用意したテキストふせんを電子黒板やプロジェクターを用いて投影し、説明する。

step9

【参考・補足】
今日、学習した相加平均と相乗平均の大小関係の考え方は、これから数学の学習でも大いに役立つ。
教科書の内容とあわせて理解を深めてほしい。

参考・補足

今日、学習した多面体は、他にもさまざまな視点で分類がなされ、さまざまな性質が考えられている。興味があれば自分で研究し、理解を深めてほしいという意図を持った授業であることを説明する。

授業の意図を伝える際の補助として、下の YouTube 動画の URL を貼り付けたリンクふせんを授業支援機能を用いて配布し、視聴を促す。
「演習・アウトプットの構成にオイラーの多面体定理【超わかる！高校数学 I・A】～演習～」
(<https://www.youtube.com/watch?v=HlCVAmmyWo&t=1s>)